実力をつけるために…

どうしたら自転車が上手に乗れるようになるのだろうか？
補助輪を付けて練習した人もいたでしょう．何度も転んで怪我をして，それでも諦めずに乗り続けることで，上手く乗れるようになりました．自転車に３回しか乗ったことがない人と300回乗ったことがある人ではどちらが上手に乗れるでしょうか．その答は明白です．自転車を上手に乗れるようになる為に，競輪選手のビデオを徹底研究する人がいたとしたら，あなたはどうアドバイスしますか？
そんなものをいくら見て研究しても，実際に自転車に乗ってみないと上手にはならないとアドバイスするでしょう．

受験勉強というのは，数学に限らず，自転車を上手に乗ることに似ています．一流の学者の論文を読んだりしてもいけないわけで，実際に自分のまわりにある問題と実際に格闘してもがいて苦しんではじめて問題が上手に解けるようになるのですね．
ただ，受験勉強の場合は，自転車における補助輪に相当する，参考書や予備校，そして「スタディサプリ」など，これから実力をつけようと考えている受験生にとっての踏み台になるものが沢山あります．
それらを上手に利用して，最後は自分の力で時間の許す限り多くの問題を経験して，制限時間内でちゃんとした解答を書けるようになるまで徹底的に練習することによって，合格がより確実なものになるわけです．

以上のことを意識しながら授業を受けて，自分の及ばない所を少しでもなおしていけば，必ず数学はできるようになるはずです．

最後まで諦めずに頑張りましょう‼

堺　義明

高１・２　トップレベル数学ⅠAⅡB　（後期）

目　　次

第 25 講　平面ベクトルと図示
第 26 講　空間ベクトル
第 27 講　点と直線の距離
第 28 講　軌跡の求め方
第 29 講　通過領域
第 30 講　領域と最大最小問題
第 31 講　円順列やじゅず順列
第 32 講　n 人を部屋に分ける
第 33 講　最短経路
第 34 講　事象の考え方と確率
第 35 講　条件付き確率
第 36 講　相加平均と相乗平均
第 37 講　解と係数の関係
第 38 講　方程式・不等式の解
第 39 講　虚数と方程式
第 40 講　解の個数
第 41 講　複数の変数の取り扱い
第 42 講　無理数の証明
第 43 講　因数定理・剰余の定理
第 44 講　$A=BQ+R$ について
第 45 講　整数問題の攻め方　その１
第 46 講　整数問題の攻め方　その２
第 47 講　p 進法
第 48 講　必要十分条件

第25講　平面ベクトルと図示

25 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ に関して，次の各問いに答えよ．ただし，α，β は実数，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ は平行ではなく，双方とも零ベクトルではないものとする．

(1) $\alpha \geqq 0$，$\beta \geqq 0$，$\alpha+\beta=1$ を満たすとき，点 P の軌跡または存在領域を図示せよ．

(2) $\alpha>0$，$\beta>0$，$\alpha+\beta<1$ を満たすとき，点 P の軌跡または存在領域を図示せよ．

(3) $0<\alpha<1$，$0<\beta<1$ を満たすとき，点 P の軌跡または存在領域を図示せよ．

(4) $\alpha<1$，$\beta<1$，$\alpha+\beta>1$ を満たすとき，点 P の軌跡または存在領域を図示せよ．

(5) $0 \leqq \beta-\alpha \leqq 1$，$1 \leqq \alpha+\beta \leqq 2$ を満たすとき，点 P の軌跡または存在領域を図示せよ．

(6) $0 \leqq \beta-\alpha \leqq 1$，$1 \leqq \alpha+\beta \leqq 2$，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=2$ を満たす点 P に関し，$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$ の最大値と最小値を求めよ．

＜ Note ＞

第25講　平面ベクトルと図示

25 平行四辺形 ABCD の対角線の交点を E とし，s，t，u を実数とする．点 P，Q，R は，この平行四辺形と同一平面上にあるものとする．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$，$s+2t\leqq 1$，$s\geqq 0$，$t\geqq 0$ で表される点 P の存在範囲を図示せよ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AQ}}+\overrightarrow{\mathrm{BQ}}+\overrightarrow{\mathrm{CQ}}=u\overrightarrow{\mathrm{DQ}}$ で表される点 Q の存在範囲を図示せよ．

(3) 内積 $(\overrightarrow{\mathrm{ER}}+\overrightarrow{\mathrm{EA}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{ER}}-\overrightarrow{\mathrm{EA}})=0$ で表される点 R の存在範囲を図示せよ．

< Note >

テキスト解答

第 25 講　平面ベクトルと図示

25　$\overrightarrow{OP}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}$ に関して，次の各問いに答えよ．ただし，α，β は実数，$\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ は平行ではなく，双方とも零ベクトルではないものとする．

(1)　$\alpha\geqq 0$，$\beta\geqq 0$，$\alpha+\beta=1$ を満たすとき，点 P の軌跡または存在領域を図示せよ．

(2)　$\alpha>0$，$\beta>0$，$\alpha+\beta<1$ を満たすとき，点 P の軌跡または存在領域を図示せよ．

(3)　$0<\alpha<1$，$0<\beta<1$ を満たすとき，点 P の軌跡または存在領域を図示せよ．

(4)　$\alpha<1$，$\beta<1$，$\alpha+\beta>1$ を満たすとき，点 P の軌跡または存在領域を図示せよ．

(5)　$0\leqq\beta-\alpha\leqq 1$，$1\leqq\alpha+\beta\leqq 2$ を満たすとき，点 P の軌跡または存在領域を図示せよ．

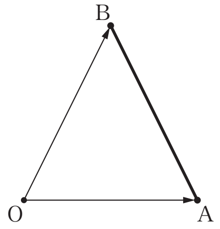
(6)　$0\leqq\beta-\alpha\leqq 1$，$1\leqq\alpha+\beta\leqq 2$，$|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{AB}|=2$ を満たす点 P に関し，$|\overrightarrow{OP}|$ の最大値と最小値を求めよ．

【答】　(1) 略　(2) 略　(3) 略　(4) 略　(5) 略　(6) 最大値 $\sqrt{13}$，最小値 $\sqrt{3}$

【解答】

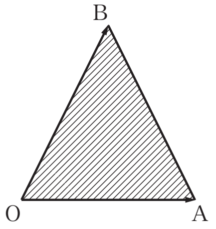
(1)　P は線分 AB 上の点．

よって P の軌跡は図の実線．



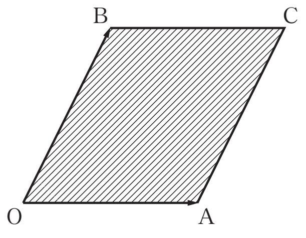
(2)　P は三角形 OAB の内部の点．

よって P の存在領域は図の斜線部分（境界は含まない）．



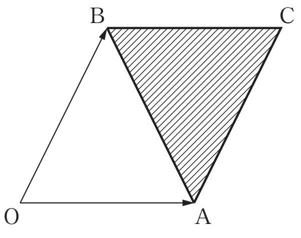
(3)　点 C を $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ を満たす点と定めると，P は平行四辺形 OACB の内部の点．

よって P の存在領域は図の斜線部分（境界は含まない）．



(4)　点 C を $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ を満たす点と定めると，P は三角形 ACB の内部の点．

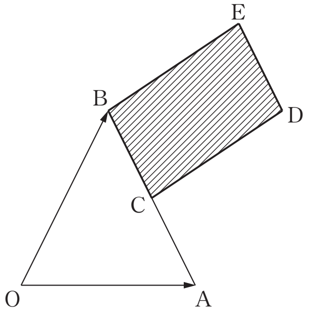
よって P の存在領域は図の斜線部分（境界は含まない）．



(5)　$\overrightarrow{OC}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$,

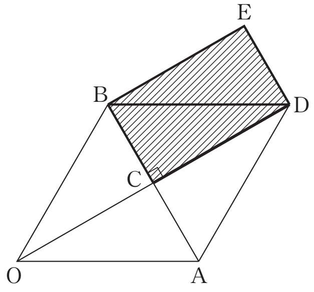
$\overrightarrow{OE}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\dfrac{3}{2}\overrightarrow{OB}$ となるように点 C, D, E を定めると，P は平行四辺形 BCDE の周及び内部の点.

よって P の存在領域は図の斜線部分（境界を含む）.



(6)　(5)と同様に点を定める.

題意より三角形 OAB は正三角形であるから，下図のように OC⊥AB, C はひし形 OADB の対角線の交点となる.



よって，$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OC}$ のとき $|\overrightarrow{OP}|$ は最小値 $\sqrt{\mathbf{3}}$ をとり，$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OE}$ のとき $|\overrightarrow{OP}|$ は最大値 $\sqrt{(2\sqrt{3})^2+1^2}=\sqrt{\mathbf{13}}$ をとる.

練習問題解答

第 25 講　平面ベクトルと図示

25　平行四辺形 ABCD の対角線の交点を E とし，s，t，u を実数とする．点 P，Q，R は，この平行四辺形と同一平面上にあるものとする．

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$，$s+2t\leqq 1$，$s\geqq 0$，$t\geqq 0$ で表される点 P の存在範囲を図示せよ．

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}+\overrightarrow{\mathrm{BQ}}+\overrightarrow{\mathrm{CQ}}=u\overrightarrow{\mathrm{DQ}}$ で表される点 Q の存在範囲を図示せよ．

(3)　内積 $(\overrightarrow{\mathrm{ER}}+\overrightarrow{\mathrm{EA}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{ER}}-\overrightarrow{\mathrm{EA}})=0$ で表される点 R の存在範囲を図示せよ．

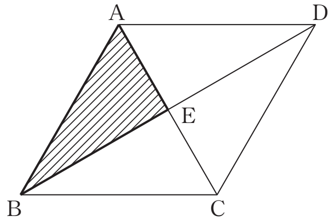
【答】　略

【解答】

(1)　ABCD は平行四辺形より，$\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{AE}}$ であるので

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+2t\times\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+2t\overrightarrow{\mathrm{AE}}$$

$s+2t\leqq 1$，$s\geqq 0$，$2t\geqq 0$ であるから，P の存在範囲は △ABE の周と内部.

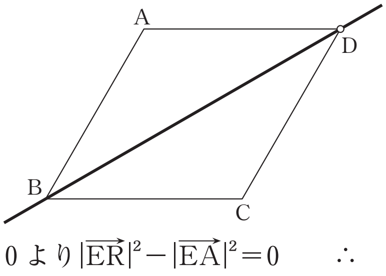


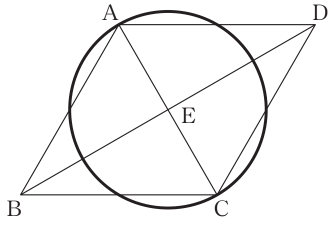
(2)　$u\overrightarrow{\mathrm{DQ}}=(\overrightarrow{\mathrm{DQ}}-\overrightarrow{\mathrm{DA}})+(\overrightarrow{\mathrm{DQ}}-\overrightarrow{\mathrm{DB}})+(\overrightarrow{\mathrm{DQ}}-\overrightarrow{\mathrm{DC}})$ より

$$(3-u)\overrightarrow{\mathrm{DQ}}=\overrightarrow{\mathrm{DA}}+\overrightarrow{\mathrm{DB}}+\overrightarrow{\mathrm{DC}}$$

$$(3-u)\overrightarrow{\mathrm{DQ}}=2\overrightarrow{\mathrm{DB}}\qquad(\overrightarrow{\mathrm{DA}}+\overrightarrow{\mathrm{DC}}=\overrightarrow{\mathrm{DB}}\text{ より})$$

$u=3$ のとき $\overrightarrow{\mathrm{DB}}=\vec{0}$ となり不適．ゆえに $u\neq 3$ であるから $\overrightarrow{\mathrm{DQ}}=\dfrac{2}{3-u}\overrightarrow{\mathrm{DB}}$ で，$\dfrac{2}{3-u}$ は 0 以外のすべての実数値をとるので，Q の存在範囲は直線 DB から点 D を除いた部分.



(3)　$(\overrightarrow{\mathrm{ER}}+\overrightarrow{\mathrm{EA}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{ER}}-\overrightarrow{\mathrm{EA}})=0$ より $|\overrightarrow{\mathrm{ER}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{EA}}|^2=0$　　$\therefore\quad |\overrightarrow{\mathrm{ER}}|=|\overrightarrow{\mathrm{EA}}|$

よって R の存在範囲は点 E を中心とする半径 EA の円.